第 1 届IMO

1. 求证(21n+4)/(14n+3) 对每个自然数 n 都是最简分数。

2. 设√(x+√(2x-1))+√(x-√(2x-1))=A,试在以下 3 种情况下分别求出 x 的实数解：

(a) A=√2；(b)A=1；(c)A=2。

3. a、b、c 都是实数，已知 cos x 的二次方程

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0,$$

试用 a,b,c 作出一个关于 cos 2x 的二次方程，使它的根与原来的方程一样。当 a=4,b=2,c=-1 时比较 cos x 和 cos 2x 的方程式。

4. 试作一直角三角形使其斜边为已知的 c，斜边上的中线是两直角边的几何平均值。

5. 在线段 AB 上任意选取一点 M，在 AB 的同一侧分别以 AM、MB 为底作正方形 AMCD、MBEF，这两个正方形的外接圆的圆心分别是 P、Q，设这两个外接圆又交于 M、N，

(a.) 求证 AF、BC 相交于 N 点；

(b.) 求证 不论点 M 如何选取 直线 MN 都通过一定点 S；

(c.) 当 M 在 A 与 B 之间变动时，求线断 PQ 的中点的轨迹。

6. 两个平面 P、Q 交于一线 p，A 为 p 上给定一点，C 为 Q 上给定一点，并且这两点都不在直线 p 上。试作一等腰梯形 ABCD（AB 平行于 CD），使得它有一个内切圆，并且顶点 B、D 分别落在平面 P 和 Q 上。

第 2 届IMO

1. 找出所有具有下列性质的三位数 N：N 能被 11 整除且 N/11 等于 N 的各位数字的平方和。

2. 寻找使下式成立的实数 x：

$$4x^2/(1 - \sqrt{(1 + 2x)})^2 < 2x + 9$$

3. 直角三角形 ABC 的斜边 BC 的长为 a，将它分成 n 等份（n 为奇数），令α为从 A 点向中间的那一小段线段所张的锐角，从 A 到 BC 边的高长为 h，求证：

$$\tan \alpha = 4nh/(an^2 - a).$$

4. 已知从 A、B 引出的高线长度以及从 A 引出的中线长，求作三角形 ABC。

5. 正方体 ABCDA'B'C'D'（上底面 ABCD，下底面 A'B'C'D'）。X 是对角线 AC 上任意一点，Y 是 B'D'上任意一点。

a. 求 XY 中点的轨迹；
b. 求(a)中轨迹上的、并且还满足 ZY=2XZ 的点 Z 的轨迹。

6. 一个圆锥内有一内接球，又有一圆柱体外切于此圆球，其底面落在圆锥的底面上。令 V_1 为圆锥的体积，V_2 为圆柱的体积。

(a). 求证：V_1 不等于 V_2 ；
(b). 求 V_1/V_2 的最小值；并在此情况下作出圆锥顶角的一般。

7. 等腰梯形 ABCD，AB 平行于 DC，BC=AD。令 AB=a,CD=c，梯形的高为 h。X 点在对称轴上并使得 角 BXC、AXD 都是直角。试作出所有这样的 X 点并计算 X 到两底的距离；再讨论在什么样的条件下这样的 X 点确实存在。

第 3 届IMO

1. 设 a、b 是常数，解方程组

$$x + y + z = a; \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2; \quad xy=z^2$$

并求出若使 x、y、z 是互不相同的正数，a、b 应满足什么条件？

2. 设 a、b、c 是某三角形的边，A 是其面积，求证：

$$a^2 + b^2 + c^2 >= 4\sqrt{3} A.$$

并求出等号何时成立。

3. 解方程 $\cos^n x - \sin^n x = 1$，其中 n 是一个自然数。

4. P 是三角形 ABC 内部一点，PA 交 BC 于 D，PB 交 AC 于 E，PC 交 AB 于 F，求证 AP/PD, BP/PE, CP/PF 中至少有一个不大于 2，也至少有一个不小于 2。

5. 作三角形 ABC 使得 AC=b, AB=c，锐角 AMB = α,其中 M 是线断 BC 的中点。求证这个三角形存在的充要条件是

$$b \tan(\alpha/2) <= c < b.$$

又问上式何时等号成立。

6. 三个不共线的点 A、B、C，平面 p 不平行于 ABC，并且 A、B、C 在 p 的同一侧。在 p 上任意取三个点 A'，B'，C'， A''，B''，C''设分别是边 AA'，BB'，CC'的中点，O 是三角形 A''B''C''的重心。问，当 A',B',C'变化时，O 的轨迹是什么？

第 4 届IMO

1. 找出具有下列各性质的最小正整数 n：它的最后一位数字是 6，如果把最后的 6 去掉并放在最前面所得到的数是原来数的 4 被。

2. 试找出满足下列不等式的所有实数 x：

√(3-x)- √(x+1) > 1/2.

3. 正方体 ABCDA’B’C’D’（ABCD、A’B’C’D’分别是上下底）。一点 x 沿着正方形 ABCD 的边界以方向 ABCDA 作匀速运动；一点 Y 以同样的速度沿着正方形 B’C’CB 的边界以方向 B’C’CBB’运动。点 X、Y 在同一时刻分别从点 A、B’开始运动。求线断 XY 的中点的轨迹。

4. 解方程 $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$。

5. 在圆 K 上有三个不同的点 A、B、C。试在 K 上再作出一点 D 使得这四点所形成的四边形有一个内切圆。

6. 一个等腰三角形，设 R 为其外接圆半径，内切圆半径为 r，求证这两个圆的圆心的距离是√(R(R-2r))。

7. 求证：正四面体有 5 个不同的球，每个球都与这六条边或其延长线相切；

反过来，如果一个四面体有 5 个这样的球，则它必然是正四面体。

第 5 届IMO

1. 找出下列方程的所有实数根（其中 p 是实参数）：

$$\sqrt{(x^2-p)}+2\sqrt{(x^2-1)} = x.$$

2. 给定一点 A 及线断 BC，设空间中一点 P 使得存在线段 BC 上有一点 X 满足 角 APX 是直角，试求出所有这样的点 P 的轨迹。

3. 在一个 n 边形中，所有内角都相等，边长依次是

$$a_1 >= a_2 >= ... >= a_n,$$

求证：所有边长都相等。

4. 设 y 是一个参数，试找出方程组 $x_i + x_{i+2} = y\, x_{i+1}$ $(i = 1, ... , 5)$的所有解 $x_1, ... , x_5$。

5. 求证

$$\cos pi/7 - \cos 2pi/7 + \cos 3pi/7 = 1/2.$$

6. 五个同学 A、B、C、D、E 参加竞赛，一种猜测说比赛结果的名次依然是 ABCDE。但是实际上没有一位同学的名次被猜中，而且预测中名次相邻的同学也没有真的相邻（例如，C、D 两位同学名次不是(1,2)、(2,3)、(3,4)、(4,5)中的任何一种）。还有一种猜测说结果会是 DAECB 的顺序。实际上是恰好有两个同学所得的名次与预测的一样；而且有两对同学（4 个不同的同学）的名次像预测中的一样是相连。试讨论最后的名次如何？

第 6 届IMO

1. (a) 求所有正整数 n 使得 $2^n - 1$ 能被 7 整除；

(b) 求证不存在正整数 n 使得 $2^n + 1$ 能被 7 整除。

2. 假设 a、b、c 是某三角形的三边长，求证：

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) <= 3abc.$$

3. 三角形 ABC 的三边长为别为 a、b、c。分别平行于 ABC 的各边作三角形 ABC 内切圆的切线，每条切线都在 ABC 中又切出一个小三角形，再在每个这样的小三角形中作内切圆，求这四个内切圆的面积之和（用 a,b,c 表示）。

4. 十七个人互相通信，每一个人都和其他人写信。在他们的信上一共讨论有三个不同的话题，每两个人只讨论一个话题，求证：这些人当中至少有三个人他们所讨论的话题是一样的。

5. 平面上有五个点，任意两点的连线都不平行，也不垂直，现从每一个点向其他四点两两连接的直线作垂线，试求出所有这些垂线的交点的最大数目。

6. 四面体 ABCD 的中心是 D_0 ，分别过 A、B、C 作 DD_0 的平行线，这些线分别交平面 BCD、CAD、ABD 于点 A_0、 B_0、 C_0，求证：ABCD 的体积是 $A_0B_0C_0D_0$ 的三分之一；再问如果 D_0 为三角形 ABC 内的任意一点，结果是否仍然成立？

第 7 届IMO

1. 试找出所有位于区间[0, 2pi] 的 x 使其满足

$$2\cos x \leqslant \left| \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x} \right| \leqslant \sqrt{2}\ .$$

2. 如下方程组的系数 a_{ij} ，

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

满足：

a. a_{11}、 a_{22}、 a_{33} 是正数，其余是负数；
b. 每个方程中的系数之和是正的。

求证：该方程组的有唯一的解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$。

3. 四面体 ABCD 被平行于 AB、CD 边的一个平面分割成两部分，并且该平面到 AB 边的距离是该平面到 CD 边距离的 k 倍。试求出 这两部分的体积比。

4. 四个实数，它们中的任何三个的乘积再加上第四个数都等于 2，求出这四个数的所有可能值。

5. 三角形 OAB 中的角 O 是锐角，M 是边 AB 上任意一点，从 M 向 OA、OB 边引垂线，垂足分别为 P、Q。设三角形 OPQ 的垂心为，求出当 M 在 AB 边上移动时点 H 的轨迹；若 M 在三角形 OAB 内部移动是 H 的轨迹又是什么？

6. 平面上给定了 n>2 个点，任何两点之间都有线断相连，这些线断长度中的最大值被定义为这个点集的直径，求证：长度为直径的线断至多有 n 条。

第 8 届IMO

1. 在一次数学竞赛中共有 A、B、C 三道题，25 名参赛者每人至少答对了一题。在所有没有答对 A 的学生中，答对 B 的人数是答对 C 的人数的两倍，只答对问题 A 的人数比既答对 A 又至少答对其他一题的人数多 1。又已知在所有恰好答对一题的参赛者中，有一半没有答对 A。请问有多少学生只答对 B？

2. 三角形 ABC，如果，

$$BC + AC = \tan C/2\ (BC \tan A + AC \tan B).$$

则该三角形为等腰三角形。

3. 求证：从正四面体的内切圆圆心到各顶点距离之和小于从空间中任意其他点到各顶点距离之和。

4. 对任何自然数 n 以及满足 $\sin 2^n x$ 不为 0 的实数 x，求证：

$$1/\sin 2x + 1/\sin 4x + ... + 1/\sin 2^n x = \cot x - \cot 2^n x.$$

5. a_i（i=1,2,3,4）是互不相同的实数，解方程组（i=1,2,3,4）

$$|a_i - a_1|\ x_1 + |a_i - a_2|\ x_2 + |a_i - a_3|\ x_3 + |a_i - a_4|\ x_4 = 1。$$

6. 在三角形 ABC 的边 BC、CA、AB 上分别任选三内点 K、L、M，求证三角形 AML、BKM、CLK 之中至少有一个的面积小于活等于三角形 ABC 的四分之一。

第 9 届IMO

1. 平行四边形 ABCD，边长 AB = a, AD = 1, 角 BAD = A, 已知三角形 ABD 是一个锐角三角形，求证以 A,B,C,D 为圆心半径为 1 的四个圆能够覆盖此平行四边形的充要条件是

$$a \leqslant \cos A + \sqrt{3} \sin A.$$

2. 若四面体有且仅有一边大于 1，求证其体积 $\leqslant 1/8$.

3. k, m, n 是自然数 且 m + k + 1 是一个大于 n+1 的素数，令 $c_s = s(s+1)$，求证

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \ldots (c_{m+n} - c_k)$$

可被乘积 $c_1c_2 \ldots c_n$整除。

4. 任意两个锐角三角形 $A_0B_0C_0$ 和 $A_1B_1C_1$ 。考虑所有与三角形 $A_1B_1C_1$ 相似且外接于三角形 $A_0B_0C_0$ 的所有三角形 ABC（即 BC 边包含 A_0，CA 边包含 B_0，AB 边包含 C_0），试构造出满足此条件的面积最大的三角形 ABC。

5. $a_1, \ldots, a_8$ 是不全为 0 的实数，令 $c_n = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n$ (n = 1, 2, 3, ...)，如果数列{ c_n }中有无穷多项等于 0，试求出所有使 $c_n = 0$ 的自然数 n。

6. 在一次运动会中，连续 n 天内（n>1）一共颁发了 m 块奖牌。在第一天，颁发了一块奖牌以及剩下 m-1 个中的 1/7；在第二天颁发了两块奖牌以及剩下的 1/7；依此类推。在最后一天即第 n 天，剩下的 n 块奖牌全部颁发完毕。问该运动会共进行了几天，一共颁发了多少块奖牌？

第 10 届IMO

1. 求证有且仅有一个三角形，它的边长为连续整数，有一个角是另外一个角的两倍。

2. 试找出所有的正整数 n，其各位数的乘积等于 $n^2 - 10n - 22$。

3. a, b, c 是不全为 0 的实数。x_1, x_2, ... , x_n 是满足下述方程组的未知数：

$ax_i^2 + bx_i + c = x_{i+1}$, 对于 i=1,2,...,n-1;

$ax_n^2 + bx_n + c = x_1$;

若设 $M= (b - 1)^2 - 4ac$ ，求证：

a. 若 M<0，则方程组无解；
b. 若 M=0，则方程组恰有一解；
c. 若 M>0，则方程组不止有一个解。

4. 求证任何四面体上都有一个顶点使得经过该顶点的三条边可构成一个三角形的三边。

5. 令 f 是定义在所有实数并取值实数的函数，并且对于某个 a>0 及任何 x>0 有

$$f(x + a) = 1/2 + \sqrt{[f(x)-f(x)^2]}$$

求证 f 是周期函数，并且当 a=1 时请给出一个非常值函数的例子。

6. 对任何自然数 n，试计算下式的值

$$[(n+1)/2] + [(n+2)/4] + [(n+4)/8] + ... + [(n+2^k)/2^{k+1}] + ...$$

其中[x]表示不超过 x 的最大整数。

第 11 届IMO

1. 对任意正整数 n，求证有无穷多个正整数 m 使得 $n^4 + m$ 不是质数。

2. 令 $f(x) = \cos(a_1 + x) + 1/2 \cos(a_2 + x) + 1/4 \cos(a_3 + x) + ... + 1/2^{n-1} \cos(a_n + x)$，其中 a_i 是实数常量，x 是实数变量。现已知 $f(x_1) = f(x_2) = 0$，求证 $x_1 - x_2$ 是 π 的整数倍。

3. 对每一个 k = 1, 2, 3, 4, 5，试找出 a>0 应满足的充要条件使得存在一个四面体，其中 k 个边长均为 a，其余 6-k 个边的长度均为 1。

4. 以 AB 为直径的半圆弧，C 是其上不同于 A、B 的一点，D 是 C 向 AB 作垂线的垂足。K_1 是三角形 ABC 的内切圆，圆 K_2 与 CD、DA 以及半圆都相切，圆 K_3 与 CD、DB 及半圆相切。求证：圆 K_1、 K_2 、 K_3 除 AB 外还有一条公切线。

5. 平面上已给定了 n>4 个点，无三点共线。求证至少有 (n-3)(n-4)/2 个凸四边形，其顶点都是已给点集中的点。

6. 给定实数 x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, 满足 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 > z_1^2$, $x_2y_2 > z_2^2$，求证：

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$

并给出等号成立的充分必要条件。

第 12 届IMO

1. M 是三角形 ABC 的边 AB 上的任何一点，r、r_1、r_2 分别是三角形 ABC、AMC、BMC 的内切圆的半径，q 是 AB 外旁切圆的半径（即与 AB 边相切，与 CA、CB 的延长线上相切的圆)，类似的， q_1、q_2分别是 AC、BC 外旁切圆的圆心。求证： $r_1r_2q = rq_1q_2$。

2. 已知 $0 \leqslant x_i < b$，$i = 0, 1, ..., n$ 并且 $x_n > 0$, $x_{n-1} > 0$。如果 $a>b$，$x_nx_{n-1}...x_0$ 是数 A 在 a 进制下的表示、也是 B 在 b 进制下的表示，则 $x_{n-1}x_{n-2}...x_0$ 表示了 A’在 a 进制下的表示、B’在 b 进制下的表示。求证：A’B<AB’。

3. 实数 $a_0, a_1, a_2, ...$满足 $1 = a_0 <= a_1 <= a_2 <= ...$，并定义

$$b_n = \sum (1 - a_{k-1}/a_k) / \sqrt{a_k}$$

其中求和是 k 从 1 到 n。

a. 求证 $0 \leqslant b_n < 2$；
b. 设 c 满足 $0 \leqslant c < 2$，求证可找到 a_n 使得当 n 足够大时 $b_n > c$ 成立。

4. 试找出所有的正整数 n 使得集合 {n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5} 可被分拆成两个子集合，每个子集合的元素的乘积相等。

5. 四面体 ABCD，角 BDC 是直角，D 向平面 ABC 作垂线的垂足恰好是三角形 ABC 的垂心。求证：

$$(AB + BC + CA)^2 \leqslant 6(AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

并问何时等号成立？

6. 平面上给定 100 个点，无三点共线，求证：这些点构成的三角形中至多 70% 是锐角三角形。

第 13 届IMO

1. 令 $E_n = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n) + \ldots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})$. 求证 $E_n >= 0$ 对于 n=3 或 5 成立，而对于其他自然数 n>2 不成立。

2. 凸多边形 P_1 的顶点是 $A_1, A_2, \ldots, A_9$，若将顶点 A_1 平移至 A_i 时则 P_1 平移成了多边形 P_i，求证 $P_1, P_2, \ldots, P_9$ 之中至少有两个具有一共同内点。

3. 求证能够找到一个由形式 $2^n - 3$（n 是正整数）的整数构成的集合并满足任何两个元素互质。

4. 四面体 ABCD 的所有面都是锐角三角形，在线段 AB 上取一内点 X，现在 BC 上取内点 Y，CD 上取内点 Z，AD 上内点 T。求证：

a. 如果 ∠DAB+∠BCD ≠ ∠CDA+∠ABC，则没有一条闭路径 XYZTX 具有最小值；
b. 如果 ∠DAB+∠BCD ＝ ∠CDA+∠ABC，则有无穷多最短路径 XYZTX，它们的长度是 2AC sin(k/2)，其中 k=∠BAC+∠CAD+∠DAB。

5. 对任何自然数 m，求证存在平面上一有限点集 S，满足：对 S 中的每一个点 A，存在 S 中的恰好 m 个点与 A 的距离为单位长。

6. 设 $A = (a_{ij})$，其中 $i, j = 1, 2, \ldots, n$，是一个方阵，元素 a_{ij} 都是非负整数。若 i、j 使得 $a_{ij} = 0$，则第 i 行和第 j 列的元素之和 大于或等于 n。求证：该方阵中所有元素之和 大于或等于 $n^2/2$。

第 14 届IMO

1.有十个互不相同的二位数，求证必可从中选出两个不相交的子集，使得这两个子集中的元素之和相等。

2. 设 $n>4$， 求证每一个圆内接四边形都可以分割成 n 个圆内接四边形。

3. m,n 是任意非负整数，求证下式是一整数。

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

4. 试找出下述方程组的所有正实数解：

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \le 0$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \le 0$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \le 0$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \le 0$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \le 0$$

5. f、g 都是定义在实数上并取值实数的函数，并且满足方程

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)g(y),$$

又已知 f 不恒等于 0 且 $|f(x)| \le 1$ 。求证对所有 x 同样有 $|g(x)| \le 1$ 。

6. 给定四个不相同的平行平面，求证存在一个正四面体，它的四个定点分别在这四个平面上。

第 15 届IMO

1. OP_1, OP_2, ... , OP_{2n+1} 是平面上的单位向量，其中点 P_1, P_2, ... , P_{2n+1} 都是位于通过点 O 的一条直线的同一侧，求证

$$|OP_1 + ... + OP_{2n+1}| >= 1.$$

2. 问能否在空间中找到一个不共面的有限点集 M 使得，对 M 中的任何两点 A、B，都可以再在 M 中寻找到两点 C、D，而直线 AB、CD 是不相同的并且是互相平行的。

3. 考虑所有这样的实数 a、b 使得方程

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

至少有一个实根。试找出 $a^2 + b^2$ 的最小值。

4. 一个士兵需要在一个等边三角形的区域内探测有没有地雷，他的扫雷器的半径是三角形高的一半，士兵从三角形的一个定点出发，试问如果要完成任务且使行程最短他应该走什么样的路径？

5. G 是具有下述形式且非常值的函数的集合：

$$f(x) = ax + b，其中 a,b,x 都是实数。$$

并且已知 G 具有这些性质：

- 如果 f,g 都属于 G，则 $fg(x) = f(g(x))$ 也属于 G；
- 如果 f 属于 G，则 $f^{-1}(x) = x/a - b/a$ 也属于 G；
- 对任何 f 属于 G，存在一个实数 x_f 使得 $f(x_f) = x_f$ 成立。

求证：存在实数 M 使得 $f(M)=M$ 对所有 G 中的函数 f 都成立。

6. a_1, a_2, ... , a_n 是正实数，实数 q 满足 $0 < q < 1$，试求出 n 格实数 b_1, b_2, ... , b_n 使得：

a. $a_i < b_i$, $i = 1, 2, ... , n$;
b. $q < b_{i+1}/b_i < 1/q$, $i = 1, 2, ... , n-1$;
c. $b_1 + b_2 + ... + b_n < (a_1 + a_2 + ... + a_n)(1 + q)/(1 - q)$.

第 16 届IMO

1. 三个玩家玩游戏。在三张扑克牌上分别写上一个正整数，并且每张牌上的数都不相同。在每一轮游戏中都是随机的把卡片分给这些玩家，然后每个玩家拿到所分得卡片上数目的筹码。当游戏进行时，玩家手上的筹码自然是越来越多。假设游戏至少进行了两轮以上。在最后一轮结束时，第一个玩家有筹码 20 个，第二个玩家有 10 个，第三个玩家有 9 个。又已知在最后一轮游戏中第三个玩家拿到的是最大数目的筹码。试问，在第一轮游戏中哪个玩家收到了中间数量的筹码？

2. 三角形 ABC，求证在边 AB 上存在一点 D 使得 CD 是 AD、DB 的几何平均值的充要条件是

$$\sin A \sin B <= \sin^2(C/2).$$

3. 试证明对任意非负整数 n，下式都不能被 5 整除：

$$\sum \quad C(2n+1, 2k+1)2^{3k},$$

上式中的求和是 k 从 0 到 n，符号 C(r,s) 表示二项式系数 r!/(s!(r-s)!)。

4. 沿着一个 8 x 8 象棋盘（黑白相间）中的线将其分割成 p 个不相交的长方形，使得每个长方形内的黑白小方格的数目一样，并且每个长方形中小方格的数量也都不一样多。求出所有可能 p 值中的最大值；并对这样的最大值求出所有可能的分法（即求出那些长方形的大小）。

5. a,b,c,d 是任意实数，判定下式的所有可能值：

$$a/(a+b+d) + b/(a+b+c) + c/(b+c+d) + d/(a+c+d)。$$

6. 设 P(x) 是一个指数 d>0 的整系数多项式，n 是 P(X)=1 或-1 的不同整根的个数，则有

$n <= d + 2.$

第 17 届IMO

1. 已知 $x_1 >= x_2 >= ... >= x_n$, 以及 $y_1 >= y_2 >= ... >= y_n$ 都是实数，求证 若 $z_1, z_2, ..., z_n$ 是 y_i 的任意排列则有

$$\sum(x_i-y_i)^2 <= \sum(x_i-z_i)^2$$

上式中左右两边的求和都是 i 从 1 到 n。

2. 令 $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ 是一递增正整数序列，求证对所有 i>=1，存在无穷多个 a_n 可以写成 $a_n = ra_i + sa_j$的形式，其中 r，s 是正实数且 j > i。

3. 任意三角形 ABC 的边上，向外作三角形 ABR,BCP，CAQ，使角 CBP、角 CAQ 都是 45 度，角 BCP、角 ACQ 都是 30 度，角 ABR、角 BAR 都是 15 度。求证角 QRP 是直角并且 QR=RP。

4. 令 A 是将 4444^{4444}写成十进制数字时的各位数字之和，令 B 时 A 的各位数字之和，求 B 的各位数字之和。

5. 判定并证明能否在单位圆上找到 1975 个点使得任意两点间的距离为有理数。

6. 找出所有两个变量的多项式 P(x, y)使其满足：

I. 对某一正整数 n 及所有实数 t、x、y 有 $P(tx, ty) = t^nP(x, y)$成立；

II. 对所有实数 x、y、z 有

$$P(y + z, x) + P(z + x, y) + P(x + y, z) = 0;$$

III. P(1, 0) = 1。

第 18 届IMO

1.　平面上一凸四边形的面积是 32，两对边与一对角线之和为 16，求另外一个对角线的所有可能的长度。

2. 令 $P_1(x) = x^2 - 2$, $P_{i+1} = P_1(P_i(x))$, $i = 1, 2, 3, ...$，求证对任何一个正整数 n，方程式 $P_n(x) = x$ 的所有根都是互不相同的实数。

3. 一个长方形的箱子可以用单位正方体完全装满，如果用体积为 2 的正方体来尽量装填，使得每个边都与箱子的边平行，则恰能装满箱子的 40%，求所有这种箱子的可能尺寸（长、宽、高）。

4.　试将 1976 分解成一些正整数之和，求这些正整数乘积的最大值，并加以证明。

5.　n 是一个正整数，m = 2n，a_{ij} = 0、1 或-1 （$1 <= i <= n$, $1 <= j <= m$）。还有 m 个未知数 $x_1, x_2, ..., x_m$满足下面 n 个方程：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{im}x_m = 0,$$

其中 $i = 1, 2, ..., n$。求证这 n 个方程有一组不全为 0 的整数解（$x_1, x_2, ..., x_m$）使得$|x_i| <= m$。

6.　一个序列 $u_0, u_1, u_2, ...$ 定义为：

$$u_0= 2,\ u_1 = 5/2,\ u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1,\ n = 1, 2, ...$$

求证

$$[u_n] = 2^{(2n - (-1)n)/3},$$

其中[x]表示不大于 x 的最大整数。

第 19 届IMO

1. 在正方形 ABCD 中作等边三角形 ABK、BCL、CDM、DAN，证明线段 KL、LM、MN、NK 的四个中点以及线段 AK、BK、BL、CL、CM、DM、DN、AN 的八个中点构成一个正十二边形的定点。

2. 在一个有限项的实数序列中，任意的相连七项之和为负，任意的相连十一项之和为正。求出这种序列最多有几项。

3. n>2 是一给定整数，V_n 是所有 1+kn 形式的整数构成的集合，其中 k 是正整数，对于 V_n 中的一个数 m，如果不存在 V_n 中的两个数 p、q 使得 m=pq，则称 m 是不可分解的。求证：V_n 中存在一数 r，它可有多于一种的方式表示为 V_n 中不可分解数的乘积。（乘积中若仅仅是因数的顺序不同则视为是同一种分解。）

4. 定义 f(x) = 1 - a cos x - b sin x - A cos 2x - B sin 2x，其中 a,b,A,B 都是实数常量。如果 f(x)>=0 对所有实数 x 都成立，求证

$$a^2 + b^2 <= 2 \text{ 且 } A^2 + B^2 <= 1.$$

5. a,b 是正整数，设 $a^2 + b^2$ 除以 a + b 得到商为 q，余数是 r。试求出所有的正整数对（a,b）使得 $q^2 + r = 1977$。

6. f 是定义在所有正整数上且取值也是正整数的函数，求证如果 f(n+1) > f(f(n)) 对所有正整数 n 都成立，则 f(n) = n 对每个 n 都成立。

第 20 界IMO

1. m、n 都是正整数且 n>m。如果 1978^m 和 1978^n 的十进制表示法的末三位数字相同，试求满足此条件并使 m+n 达到最小的 m 与 n。

2. P 是某已知球内部一点，A、B、C 是球面上三点，且有 PA、PB、PC 相互垂直，由 PA、PB、PC 决定的平行六面体与 P 点对角相向的顶点为 Q，试求出 Q 点的轨迹。

3. 两不交集合{f(1), f(2), f(3), ... }和{g(1), g(2), g(3), ... }的并集是全部的正整数，其中 f(1) < f(2) < f(3) < ...，g(1) < g(2) < g(3) < ... ,且有 g(n) = f(f(n)) + 1 对所有 n=1,2,3, ...成立。试计算 f(240)。

4. 等腰三角形 ABC，AB = AC。在三角形 ABC 的外接圆的内部有一与其相切的一个小圆，该小圆又分别与 AB、AC 相切于 P、Q 两点。求证：线段 PQ 的中点恰为三角形 ABC 内切圆的圆心。

5. 令{a_k} 为互不相同的正整数数列，求证对于所有的正整数 n，有

$$\sum a_k/k^2 >= \sum 1/k;$$

上式中两边的求和都是 k 从 1 到 n。

6. 某国际组织共有来自六个国家的共 1978 名会员，会员编号分别是 1,2,...,1978。求证至少有某一会员的编号，恰为与他同国家的另外两位会员编号的和，或者是他同国家的两外一名会员编号的两倍。

第 21 界 IMO

1. m,n 是满足下述条件的正整数:

$$m/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ... - 1/1318 + 1/1319.$$

求证：m 可被 1979 整除。

2. 一个棱柱的上底和下底分别是正五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$、$B_1B_2B_3B_4B_5$ 。这两个正五边形的每条边以及每个 A_iB_j 边都被染上红色或蓝色。又已知每个边都被着色的三角形（其顶点即这个棱柱的顶点）必有两边着不同色，求证：上、下底的十条边都被染上了同一种颜色。

3. 平面上的两个圆相交，A 是其中一个交点。现有两质点同时从 A 出发各自以恒定的速度，同以顺时针方向或同以逆时针方向绕各自的圆移动，在绕过一周之后这两点又同时回到了 A 点。求证：在这个平面上一定存在某个固定的点 P 使得在任意时刻 P 点都与这两动点的距离相等。

4. 给定一平面 k，在这个平面上有一点 P，平面外有一点 Q，试找出平面 k 上的所有的点 R 使得(QP + PR)/QR 为最大值。

5. 试求出所有的实数 a，使得存在非负实数 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5满足下列关系式：

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = a;$$

$$x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 + 5^3x_5 = a^2;$$

$$x_1 + 2^5x_2 + 3^5x_3 + 4^5x_4 + 5^5x_5 = a^3。$$

6. 令 A、E 是一个正八边形的两相对顶点，一只青蛙从 A 点开始跳动，除了 E 点外，从八边形中的其他每一个顶点都可以跳至与它相邻两顶点中的任何一个。当它跳到 E 点时就停止运动。设 a_n 为恰好经过 n 步跳动以后到达 E 点的所有可能线路的个数，求证：

$$a_{2n-1} = 0$$
$$a_{2n} = (2 + \sqrt{2})^{n-1}/\sqrt{2} - (2 - \sqrt{2})^{n-1}/\sqrt{2}。$$

第 22 界IMO

1.　P 是三角形 ABC 内部一点，D、E、F 分别是从 P 点向边 BC、CA、AB 所引垂线的垂足。试找出 BC/PD + CA/PE + AB/PF 式达到最小值的所有 P 点。

2.　取 r 满足 1 <= r <= n，并考虑集合{1, 2, ... , n}的所有 r 元子集，每个子集都有一个最小元素。设 F(n,r)是所有这些最小元素的算术平均值。求证：F(n,r) = (n+1)/(r+1)。

3.　设 m、n 是属于{1, 2, ... , 1981}的整数并且满足$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$。试计算$m^2 + n^2$的最大值。

4. 设 n>2，问

a. n 为何值时，存在一个由 n 个连续的正整数构成的集合使得其中的最大元是其它 n-1 个元素最小公倍数的因子？
b. n 为何值时，恰好值存在一个满足条件的集合？

5. 三个都通过点 O 的等半径的圆位于一个给定三角形的内部，并且每个圆都相切于这个三角形的两条边。求证：这个三角形的内心、外心、O 点三点共线。

6. 函数 f(x,y)，对于任何非负整数 x,y 都满足 f(0,y) = y + 1, f(x+1,0) = f(x,1), f(x+1,y+1) = f(x,f(x+1,y))。试计算 f(4, 1981)的值。

第 23 届IMO

1. f(n)是定义在正整数上且取值为非负整数的函数，f(2) = 0, f(3) > 0, f(9999) = 3333，并对所有 m,n 有 f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 或 1。试求出 f(1982)。

2. $A_1A_2A_3$是不等腰三角形，其三边为 a_1, a_2, a_3 ，其中 a_i 是角 A_i的对边， 设 M_i 是边 a_i 的中点，T_i 是三角形的内切圆在边 a_i 上的切点，记 S_i 为点 T_i 关于内角 A_i 的角平分线的对称点，求证线 M_1S_1, M_2S_2 和 M_3S_3 共点。

3. 考虑无限正实数序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0 = 1$ 及 $x_0 >= x_1 >= x_2 >= ...$,

   a. 求证对每个这样的序列都有存在一个 n >= 1 使得

$$x_0^2/x_1 + x_1^2/x_2 + ... + x_{n-1}^2/x_n >= 3.999.$$

   b. 试寻找一个这样的序列使其满足

$$x_0^2/x_1 + x_1^2/x_2 + ... + x_{n-1}^2/x_n < 4 \quad \text{对所有 n 成立。}$$

4. n 使正整数，求证如果方程 $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ 有关于整数 x,y 的一个解，则其至少有三个解；当 n=2891 时再证明这个方程无整数解。

5. 正六边形 ABCDEF 的对角线 AC、CE 上分别有分点 M、N 并且 AM/AC = CN/CE = r，如果 B、M、N 共线，试求 r 的值。

6. 设 S 是边长为 100 的正方形，L 是在 S 内部不自交的系列线段 A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ... , $A_{n-1}A_n$ 并且 A_0 与 A_n 不重合。已知对于每一个在 S 边界上的点 P，L 中存在一个点与 P 之间的距离不大于 1/2。求证：L 中存在两点 X、Y，X 与 Y 的距离不大于 1，并且 L 上位于 X 和 Y 之间的部分不少于 198。

第 24 届IMO

1.　试找出所有定义在正实数并取值正实数的函数 f，使其满足 $f(x(f(y))=yf(x)$对所有 x，y 成立，并且当 x 趋向于无穷大时 $f(x)$ 趋向于 0.

2.　圆 C_1、C_2 的圆心分别是 O_1 、O_2,它们相交于两个不同的点，设 A 是其中一个交点。这两个圆的一条公切线切 C_1、 C_2 分别于点 P_1、P_2，另外一条公切线分别切 C_1、 C_2 于点 Q_1、Q_2，再设 M_1、M_2分别是 P_1Q_1和 P_2Q_2的中点，求证：角 O_1AO_2 = 角 M_1AM_2。

3.　a，b, c 是正整数，并且它们中的任何两个都没有大于 1 的公约数。求证 $2abc-ab-bc-ca$ 是不能表示成形式 $xbc+yca+zab$ 的最大整数，其中 x，y，z 是非负整数。

4.　等边三角形 ABC，设集合 E 是该三角形的所有边界点（即边 AB,BC,CA），任意将 E 分拆成两个不相交的子集合（它们的并集是 E），试证明这两个集合中的至少一个包含有三点构成一直角三角形。

5.　问是否可能存在小于或等于 10^5 的 1983 个不同的正整数，任何三个都不构成一等茶数列。

6.　设 a,b,c 是一个三角形的三边长，求证

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)>=0.$$

并判断何时等号成立。

第 25 届IMO

1. 求证 $0 <= yz + zx + xy - 2xyz <= 7/27$，其中 x，y，z 是非负实数并满足 $x + y + z = 1$.

2. 试找出所有的正整数对（a,b）满足 ab(a+b)不能被 7 整除，但 $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ 可被 7^7 整除。

3. 给定平面上的点 O、A。平面上的每个点都被染色成有限种颜色中的一个。设 X 是平面上一给定点，以 O 为圆心的圆 C(X)的半径是 OX + (∠ AOX)/OX，其中角∠ AOX 是用弧度衡量（即范围是[0, 2л)），求证能够找到不在 OA 上的一点 X 使得它的颜色出现在圆 C(X)的圆周上。

4. 凸四边形 ABCD 的边 CD 与以 AB 为直径的圆相切，求证：AB 与以 CD 为直径的圆相且当且仅当 BC 和 AD 是平行的。

5. 设 d 是平面上一凸 n 边形（n>3）的所有对角线的长度之和，p 是它的周长。求证:

$$n - 3 < 2d/p < [n/2]\,[(n+1)/2] - 2,$$

其中[x]表示不超过 x 的最大整数。

6. $0 < a < b < c < d$ 是四个奇数且 $ad = bc$. 若 $a + d = 2^k$ 及 $b + c = 2^m$ 对某 k、m 成立,则

$a = 1$.

第 26 届IMO

1. 圆内接四边形 ABCD，现有一圆其圆心在边 AB 上并于其他三边相切，求证 AD + BC = AB.

2. 设 k<n 时互素的两个正整数。将集合 M = {1, 2, 3, ... , n-1} 中的每个数都染成蓝色或白色，保证 i 和 n-i 的颜色相同，对于不等于 k 的 i 其颜色又与|i-k|的颜色相同。求证：M 中所有数的颜色都相同。

3. $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k$ 是整系数多项式，设其中系数为奇数的个数为 o(P)。对于 i = 0, 1, 2, ... ，记 $Q_i(x) = (1 + x)^i$。求证如果 i_1, i_2, ... , i_n 都是整数并满足 $0 <= i_1 < i_2 < ... < i_n$，则有

$$o(Q_{i1} + Q_{i2} + ... + Q_{in}) >= o(Q_{i1}).$$

4. 集合 M 由 1985 个不同的正整数组成，且每个数都有一个大于 23 的素因子，求证 M 中存在 4 个元素的积是某个整数的 4 次方。

5. 圆心为 O 的一个圆经过三角形 ABC 的顶点 A 和 C，并与 AB,BC 分别交于不同的两点 K、N，三角形 ABC 的外接圆和三角形 KBN 的外接圆相交于两个不同的点 B、M，求证角 OMB 是直角。

6. 对于任何一个实数 x_1，可通过递推式

$$x_{n+1} = x_n(x_n + 1/n)$$

构造序列 x_1, x_2, ...，求证存在唯一的一个 x_1 满足对所有的 n 都有 $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ 成立。

第 27 届 IMO

1. d 是不为 2,5,13 的正整数，试证明可以在集合{2, 5, 13, d}中找出不同的两数 a,b 满足 ab-1 不是一个完全平方数。

2. 在三角形 $A_1A_2A_3$ 所在的平面上有一给定点 P_0，当 s>=4 时定义 $A_s = A_{s-3}$ ，现使用以下的方法构造一系列点 P_1，P_2，P_3，...： P_{k+1} 是 P_k 绕 A_{k+1} 顺时针旋转 120 度得到的点（k = 0, 1, 2,...）。如果 $P_{1986} = P_0$，求证 $A_1A_2A_3$ 是等边三角形。

3. 给正五边形的每个顶点赋值一个整数，使这 5 个整数之和是正的。对于任何三个连续的顶点设它们所赋予的数分别是 x,y,z，如果 y < 0 则执行下述操作：将 x,y,z 分别替换为 x + y, -y, z + y。重复执行这样的操作直到这 5 个顶点数中至少有一个是负值。试问能否经过有限步之后操作结束。

4. O 是正 n(n >= 5)边形的中心 ，设 A, B 是一对相邻的顶点。设开始的时候三角形 XYZ 与三角形 OAB 重合，现用如下的方式移动三角形 XYZ：保持 Y、Z 始终在多边形的边界上、X 在多边形的内部。试求出当 Y、Z 都走遍多边形的边界时 X 点所形成的轨迹。

5. 试找出所有定义在非负实数并取值也是非负实数的函数 f，使其满足 f(2) = 0；当 0<= x <2 时 f(x)不等于 0；对所有 x,y 都有 f(xf(y))f(y)=f(x+y)。

6. 给定平面上的一个有限点集，每个点的坐标都是整数，问有没有一种将这些点涂成红色或白色的染色方法使得在任何一条平行于坐标轴（两个坐标轴中的任何一个）的直线 L 上的红点和白点的个数之差不大于 1？

第 28 届IMO

1. 设 $p_n(k)$ 是集合{1, 2, 3, ... , n} 上具有 k 个固定点的排列的个数，求证 k 从 0 到 n 对($k\ p_n(k)$)的求和是 n!。

[一个集合 S 的一个排列是从 S 到它自身的一一映射。元素 i 称为是 f 固定点如果 f(i) = i。]

2. 锐交三角形 ABC 的内角 A 的角平分线交 BC 于 L，交 ABC 的外接圆于 N，从 L 点向 AB,AC 做垂线，垂足分别是 K、M，求证四边形 AKNM 的面积与三角形 ABC 的面积相等。

3. x_1, x_2, ... , x_n 是实数并且满足 $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$，求证对每个正整数 k >= 2 存在不全为 0 的整数 a_1, a_2, ... , a_n，使得对每个 i 有 $|a_i| \le k - 1$ 及

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n| \le (k - 1)\sqrt{n}/(k^n-1)。$$

4. 求证不存在从非负整数到非负整数的函数 f 满足对所有 n 有 f(f(n)) = n + 1987 成立。

5. n 是大于或等于 3 的整数，求证存在一个由平面上 n 个点构成的集合满足任何两点的距离都是无理数并且任何三点构成一个面积为有理数的非退化的三角形。

6. n 是大于或等于 2 的整数，如果对所有 $0 \le k \le \sqrt{n/3}$ 都有 $k^2 + k + n$ 是素数，则

当 $0 \le k \le n-2$ 时，$k^2 + k + n$ 都是素数。

第 29 届IMO

1. 考虑平面上同一圆心的两个半径分别为 R > r 的圆。P 点是小圆上一个固定的点，B 使大圆上的动点，BP 交大圆于 C，过 P 点作 BP 的垂线交小圆于 A 点（如果相切则 A=P），

a. 试确定 $AB^2 + BC^2 + CA^2$的所有可能值；
b. 试确定 BC 中点的轨迹。

2. n 是正整数， A_1， A_2， ... ， A_{2n+1} 都是集合 B 的子集，假设

i. 每个 A_i 都恰有 2n 个元素；
ii. 任何两个不同的 A_i恰有一个公共元素；
iii. B 中的每个元素至少属于两个 A_i。

试问对于什么样的 n 值有办法将 B 中的元素都标上 0 或 1 使得每个 A_i 都恰好包含 n 个标 0 的元素。

3. 函数 f 定义在正整数集上：f(1) = 1; f(3) = 3; 且对每个正整数 n 有

$$f(2n) = f(n),\ f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n)。$$

试确定小于或等于 1988 并满足 f(n) = n 的正整数 n 的个数。

4. 试证明满足

$$1/(x - 1) + 2/(x - 2) + 3/(x - 3) + ... + 70/(x - 70) >= 5/4.$$

的所有实数 x 的集合是一些互不相交的区间的并集，并且这些区间的长度之和是 1988。

5. 三角形△ABC, 角∠A 是直角，D 是 BC 边上的高的垂足。三角形△ABD、三角形△ACD 的内心的连线分别交边 AB, AC 于 K,L。求证：三角形 ABC 的面积是三角形 AKL 的面积的至少两倍。

6. a,b 都是正整数，且 ab+1 整除 $a^2 + b^2$. 求证$(a^2 + b^2)/(ab + 1)$是完全平方数。

第 30 界IMO试题

1. 试证明集合{1,2,...,1989}可以分拆成 117 个子集合 $A_1,A_2,...,A_{117}$ （即这些子集合互不相交且并集为整个集合），满足每个 A_i 包含 17 个元素，并且每个 A_i 中元素之和都相等。

2. 锐角△ABC，内角∠A 的角平分线交△ABC 的外界圆于 A_1，类似定义 B_1,C_1 点。设 AA_1 与∠ B,∠C 的外交平分线交于 A_0 点，类似定义 B_0,C_0 点。

求证：$\triangle A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的 两倍也是△ABC 面积的至少 4 倍。

3. 设 n,k 是正整数，S 是由平面上 n 个点构成的集合并且无三线共点，对任何 S 中的点 P 至少存在 S 中的 k 个点与 P 等距离。

求证： k<1/2+√2n。

4. 凸四边形 ABCD 的边 AB,AD,BC 满足 AB=AD+BC，四边形内部有一与直线 CD 距离为 h 的点 P，并且 AP=h+AD，BP=h+BC，

求证：1/√h<=1/√AD+1/√BC。

5. 试证明对每个正整数 n，存在 n 个连续的正整数使得其中无素数或素数的幂。

6. 设$\{x_1,x_2,...,x_m\}$ 是{1,2,...,2n}的一个排列，其中 n 是一个正整数。如果$|x_i-x_{i+1}|=n$ 对至少 {1,2,...,2n-1}中的一个 i 成立就说这个排列$\{x_1,x_2,...,x_m\}$具有性质 P。 试证明对于任意的 n，具有性质 P 的排列都比不具有的多。

第 31 界IMO试题

1. 弦 AB,CD 相交于圆内一点 E，M 是线段 EB 上的一点，过 E 点与△DEM 外接圆的切线分别交 BC,AC 于 F,G。

设 t=AM/AB，试用 t 表示 EF/EG。

2. 设 n>=3，考虑一个圆上由 2n-1 个不同点构成的集合 E。现给 E 中恰好 k 个点染上黑色，如果至少有一对黑点使得这两个黑点之间的弧上（两段弧中的某一个）包含恰好 E 中的 n 个点，就成这样的染色方法是“好的”。

试找出对于集合 E 能保证任意一种染色方法都是“好的”的最小的 k 值。

3. 试找出所有大于 1 的正整数 n 满足$(2^n+1)/n^2$也是整数。

4. 试构造一个从正有理数集到正有理数集的函数 f 使

f(xf(y))=f(x)/y 对任何 x,y 都成立。

5. 给定一个初始整数 $n_0>1$，两个玩家 A,B 根据下述规则交替的选择整数 $n_1, n_2, n_3, ...$：

a. 设 B 已选择 n_{2k}，则 A 选择 n_{2k+1}满足
$n_{2k} <= n_{2k+1} <= n_{2k}^2$;
b. 设 A 已选择 n_{2k+1}，则 B 选择 n_{2k+2}满足
$n_{2k+1}/n_{2k+2}=p^r$
对某个 p 及 r>=1 成立。

若 A 选到了数 1990 就获胜；若 B 选到了 1 就获胜。分别求除满足下述条件之一的 n_0：
(1) A 有必胜策略；
(2) B 有必胜策略；
(3) A,B 都没有必胜策略。

6. 求证存在一个凸 1990 边形使得所有角都相等并且边长是 $1^2, 2^2, ..., 1990^2$（顺序不定）。

第 32 界IMO试题

1. 设 I 是△ABC 的内心，∠A,∠B,∠C 的交平分线分别交对边于 A’,B’,C’点，求证:

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leqslant \frac{8}{27}$$

2. 设 n>6 是一个整数，$a_1, a_2, ..., a_k$ 都是小于 n 的正整数并且与 n 互素。

如果 $a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_k-a_{k-1}>$,

求证，n 是质数或者是 2 的幂次方。

3. 试找出最小的整数 n 使得每一个 S 的 n 元子集都包含 5 个两两互素的数。

4. 设 G 是一个有 k 条边的连通图，试证明可是对这些边编号 1,2,...,k 使得对于每个属于两条或两条以上的边的顶点， 从这个顶点出发的所有边的标号的最大公约数是 1。

注：一个图是由一组顶点和一些连接这些顶点的线段（称为边）组成。 每对顶点之间最多有 1 条边。如果对图中的任何两个不同的顶点 x,y 都有一些顶点 $x=v_0, v_1, ..., v_m=y$ 使得 v_i, v_{i+1} $(0<=i<m)$之间都有一条边，则称这个图是连通的。

5. X 是△ABC 内部中的一个点，试证明∠XAB,∠XBC, ∠XCA 中至少有一个不大于 30°。

6. 任意给定一个实数 a>1，试构造一个有界的无限序列 $x_0, x_1, x_2, ...$

使得对任何 x≠y 都有$|x_i-x_j||i-j|^a>=1$。

注：一个无限实数序列 $x_0, x_1, x_2, ...$ 是有界的如果存在一个常数 C 使得$|x_i|<C$ 对任何 i 成立。

第 33 届IMO试题

1. 试找出所有的整数 *a, b, c* 满足 $1<a<b<c$ 并且 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 是 $abc-1$ 的因子。

2. 找出所有定义在实数上并且取值也是实数的函数 f 使得对所有 x, y 都有

$f(x^2+f(y))=y+f(x)^2$。

3. 空间中有 *9* 个点，无 *4* 点共面，每两点之间连接一个被染上红色或蓝色或者不染色的线段，试找出最小的 *n* 使得，只要恰好有 *n* 条线段被染色，这些染色的线段一定包含一个同色三角形（即三角形的三边被染上相同的颜色）。

4. L 是圆 *Γ* 的一条切线，M 是 L 上的一点，试找出所有这样的点 P 的轨迹：存在 L 上的关于 M 对称的两点 Q, R，△PQR 的内切圆是 *Γ*。

5. 设 S 是三维空间中的一个有限点集， 集合 S_x, S_y, S_z 分别是 S 在平面 yz, zx, xy 上的投影，

求证：$|S|^2 \le |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$。

其中|A|表示集合 A 的元素个数。

[注：一个点到一个平面上正交投影指的是该点到平面作垂线的垂足。]

6. 对正整数 n，S(n)是满足如下条件最大的整数：对每个正整数 $k \le S(n)$，n^2 都可写成 k 个完全平方数的和。

- a. 求证对每个 $n \ge 4$ 有 $S(n) \le n^2-14$；
- b. 试找出一个整数 n 使得 $S(n)=n^2-14$；
- c. 试证明有无穷多个整数 n 使得 $S(n)=n^2-14$。

第 34 届IMO试题

1．设 $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$，其中 $n>1$ 是一个整数。

求证 $f(x)$不能表示成两个非常数的整系数得多项式的乘积。

2．设 D 是锐角三角形 ABC 内部一点且$\angle ADB=\angle ACB+90^\circ$，$AC\cdot BD=AD\cdot BC$,

- a．计算$(AB\cdot CD)/(AC\cdot BD)$；
- b．求证$\triangle ACD,\triangle BCD$的外界圆在 C 处的切线互相垂直。

3．在一个无限大的棋盘上以如下方式做游戏。开始时棋盘中的一个 n×n 的框上整齐的摆放着 n^2 个棋子（每个小方格上放着一个棋子），游戏的每一步都是在水平或者竖直方向上跨越一个棋子而
跳到一个空格子上去，并同时取走所跨越过的棋子。
试找出所有的 n 值使得游戏以只留一个棋子在棋盘上而结束。

4．对平面上的三个点 P,Q,R，定义 $m(PQR)$为$\triangle PQR$ 的最短高的长度(如果 P,Q,R 共线当然有 $m(PQR)=0$)。
求证对任何点 A,B,C,X 有 $m(ABC)\leq m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$。

5．问是否存在一个从正整数到正整数的函数 f 使得 $f(1)=2,\ f(f(n))=f(n)+n$ 对所有 n，并且
$f(n<f(n+1))$？

6．有 $n>1$ 盏灯 L_0,L_1，...，L_{n-1} 绕成一圈，为方便 L_{n+k} 也表示 L_k。 一盏灯只有开或关两个状态，初始时刻它们全是开着的，依次执行步骤 $s_0,s_1,...,$：在步骤 s_i， 如果 L_{i-1} 点燃，就关掉 L_i，否则什么都不做。试证明：

- a．存在一个正整数 M(n)使得在第 M(n)步之后所有的灯都开着；
- b．若 $n=2^k$，则可使 $M(n)=n^2-1$；
- c．若 $n=2^{k+1}$，则可使 $M(n)=n^2-n+1$。

第 35 届IMO试题

1. m和 n 都是正整数，$a_1, a_2, ..., a_m$是$\{1, 2, ..., n\}$中不同的数，只要有 $a_i + a_j \leqslant n$（i,j 可能相同）那么就有某个 k 使 $a_i + a_j = a_k$，

求证$(a_1 + ... + a_m)/m \geqslant (n+1)/2$。

2. $\triangle ABC$是等腰三角形，$AB=AC$，M是 BC的中点，O是线 AM上的点且 $OB \perp AB$，Q为线段 BC上不同于 B, C 的任意一点，E, F分别在 AB, AC上使得 E, Q, F不同并共线。

求证：$OQ \perp EF$当且仅当 $QE=QF$。

3. 对任何正整数 k,定义 $f(k)$为集合$\{k+1, k+2, ..., 2k\}$中的用二进制表示后恰有 3个 1 的元素的个数，

求证对于每个正整数 m,存在至少一个 k 使 $f(k)=m$; 并求出使得恰有一个 k 的所有 m值。

4. 试求出所有的正整数对(m, n)使得$(n^3+1)/(mn-1)$是整数。

5. S 是所有大于-1 的实数集，试找出所有的从 S 到 S 的函数 f 满足对所有 x, y, $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$, 并且对于$-1<x<0$和 $0<x$，$f(x)/x$ 使严格递增的。

6. 试证明存在满足下列性质的正整数集合 A: 对任何由素数构成的无限集 S, 都有 $k \geqslant 2$ 以及两个正整数 m, n，$m \in A$, n不$\in A$，m和 n都是 S中 k个不同元素的乘积。

第 36 届IMO试题

1. A, B, C, D 是一条直线上顺序排列的四个不同点，分别以 AC, BD 为直径的两个圆相交于 X, Y，直线 XY 交 BC 于 Z， 设 P 为直线 XY 上异于 Z 的一点，直线 CP 与以 AC 为直径的圆相交于 C, M； 直线 BP 与以 BD 为直径的圆相交于 B, N。求证：AM, DN, XY 三线共点。

2. a, b, c 为正实数且 abc=1，试证：

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$$

3. 试确定所有整数 $n>3$，使得在平面上存在 n 个点 $A_1, A_2, ..., A_n$（无三点共线）及 n 个实数 $r_1, r_2, ..., r_n$ 满足 $\triangle A_iA_jA_k$ 的面积是 $r_i+r_j+r_k$，其中是对每个三元组 $1\leqslant i<j<k\leqslant n$。

4. 正实数序列 $x_0, x_1, ..., x_{1995}$ 满足条件 $x_0=x_{1995}$ 且对于 i=1, 2, ..., 1995 有 $x_{i-1}+2/x_{i-1}=2x_i+1/x_i$.
试求出所有满足上述条件的数列中 x_0 的最大值。

5. 设 $ABCDEF$ 是凸六边形，满足 $AB=BC=CD$, $DE=EF=FA$，$\angle BCD=\angle EFA=60°$。 设 G, H 是这六边形内部两点使得 $\angle AGB=\angle DHE=120°$，

求证 $AG+GB+GH+DH+HE\geqslant CF$。

6. p 是一个奇质数，试求出集合 $\{1, 2, ..., 2p\}$ 的所有 p 元子集 A 的个数满足 A 中元素之和能被 p 整除。

第 37 界IMO试题

1. *ABCD*是一个长宽分别是 *AB=20, BC=12*的长方形板。将此长方形板分割为 *20×12*个格子状的单位小方格，*r*为一给定的正整数，一个铜币在此板上每移动一次的规则为：铜币可从一个小方格内移动到另一个小方格内的充分必要条件是这两个小方格的中点间的距离为 $\sqrt{r}$。现目标是把一个在含顶点 *A* 的小方格内的铜币经过若干次移动后到达含顶点 *B*的小方格内。

- a. 当 *r*是 *2*的倍数或者 3 的倍数时，此目标无法达成；
- b. 当 *r=73*时，此目标可以达成；
- c. 当 *r=97*时，问此目标能否达成？

2. *P*为△*ABC*内一点且∠*APB*-∠*ACB*=∠*APC*-∠*ABC*，设 *D, E*分别是∠*APB*, ∠*APC*的内心，求证：*AP, BD, CE*三线共点。

3. *S={0, 1, 2, 3, . . . }*为所有非负整数所成的集合，试找出所有由 *S*对应到 *S*本身的函数 *f*且对 *m, n*∈*S* 有 *f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)*。

4. 正整数 *a, b*使得 *15a+16b*和 *16a-15b*都是完全平方数，试求出最小的可表示成这两个完全平方数之一的可能值。

5. *ABCDEF*是凸六边形，*AB*平行于 *ED*，*BC*平行于 *FE*，*CD*平行于 *AF*。 令 R_A, R_C, R_E分别表示△*FAB*, △*BCD*, △*DEF*的外接圆的半径，并以 *p*表示该六边形的周长。
求证：$R_A+R_C+R_E \geqslant p/2$。

6. *n, p, q*都是正整数且 *n>p+q*，令 x_0, x_1, x_n都是整数，$x_0=x_n=0$且对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，$x_i-x_{i-1}=p$ 或 *q*。
求证存在下标 *i<j*且 *(i, j)*≠*(0, n)*满足 $x_i=x_j$。

第 38 界IMO试题

1. 在坐标平面上，具有整数坐标的点构成单位边长的正方格的顶点。这些正方格被涂上黑白相间的两种颜色（像棋盘一样）。对于任意一对正整数 m 和 n，考虑一个直角三角形其顶点具有整数坐标，两腰长分别为 *m* 和 *n*，且其两腰都在这些正方格的边上。 设 S_1 为这个三角形区域中所有黑色部分的总面积，S_2 则为所有白色部分的总面积。 令 $f(m,n)=|S_1-S_2|$，

- a. 当 m,n 同为正偶数或者同为正奇数时，计算 $f(m,n)$；
- b. 求证 $f(m,n)\leqslant max(m,n)/2$ 对所有 m,n 都成立；
- c. 求证不存在常量 C 使得 $f(m,n)$。

2. 设 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 中最小的内角。B 和 C 将此三角形的外接圆分成两个弧。U 为落在不含 A 点的弧上且异于 B,C 的一点。线段 AB,AC 的垂直平分线分别交 AU 于 V,W。
直线 BV, CW 相交于 T,
求证：$AU=TB+TC$。

3. $x_1,x_2,...,x_n$ 是正实数满足 $|x_1+x_2+...x_n|=1$ 且对所有 i 有 $|x_i|\leqslant(n+1)/2$。
试证明存在 $x_1,x_2,...,x_n$ 的一个 排列 $y_1,y_2,...,y_n$ 满足

$$|y_1+2y_2+...+ny_n|\leqslant(n+1)/2。$$

4. 一个 n×n 的矩阵称为一个 n 阶“银矩阵”，如果它的元素取自集合 S={1,2,...,2n-1}且对于每一个 i=1,2，...,n，它的第 i 列与第 i 行中的所有元素合起来恰好是 S 中的所有元素。求证：

- a. 不存在 n=1997 阶的银矩阵；
- b. 有无限多个 n，存在 n 阶银矩阵。

5. 试找出所有的正整数对(a,b)满足

$$a^{b^2} = b^a$$

6. 对每个正整数 n，将 n 表示成 2 的非负整数次方之和，令 f(n)为正整数 n 的上述不同表示法的个数。如果俩个表示法的差别仅在于他们中各个数相加的次序不同，这两个表示法就被视为是相同的。例如，f(4)=4，因为 4 恰有下列四种不同的表示法：4; 2+2;

2+1+1;1+1+1+1。

求证：对于任意整数 n≥3，

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$$

第 39 届IMO试题

1. 凸四边形 ABCD，对交线 AC,BD 互相垂直，对边 AB,DC 不平行，AB 和 DC 的垂直平分线相交于
P 点，P 在 ABCD 的内部。

求证 ABCD 是圆内接四边形当且仅当三角形 ABP、CDP 的面积相等。

2. 在一次竞赛中有 a 个参赛者和 b 个裁判，b≥3 是一个奇数。每个裁判可以给参赛者判“合格”或者
“不合格”，假设任何两个裁判对至多 k 个参赛者的判决相同，
求证：k/a ≥ (b-1)/2b.

3. 对任何正整数 n，用 d(n)表示 n 的正因数（包括 1,n）的个数。
试求出所有正整数 k 使存在 n 满足 $d(n^2)=kd(n)$.

4. 试找出所有的正整数对(a,b)使得 ab^2+b+7 能整除 a^2b+a+b。

5. 设 I 是三角形 ABC 的内心，三角形 ABC 的内切圆在边 BC,CA,AB 上的切点分别是 K,L,M。
通过 B 点平行于 MK 的直线交 LM,LK 分别于 R,S。

求证：三角形 RIS 是锐交三角形。

6. 考虑所有从正整数到正整数的函数 f 使之对于所有的 s、t 满足 $f(t^2f(s))=sf(t)^2$。
试求出 f(1998)的最小的可能值。

第 40 界IMO试题

1. 试找出所有这样的有限集 S：S 至少包括平面上的 3 个点；对任何两个 S 中不同的点 A, B,
AB 的垂直平分线是 S 的一个对称轴。

2. 设 $n \geqslant 2$ 是一个给定的整数，是找出最小的常量 C 使得对于所有非负实数 $x_1, ..., x_n$ 如下不等式成立：

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C (\sum x_i)^4。$$

并判断何时等号成立。

3. 给定一个 $n \times n$ 的棋盘，n 是偶数。如果这个棋盘中的两个不同的小方格有一个公共边就说他们是相邻的，但同一个方格不认为与它自身相邻。试找出最小数目的方格，使得当它们被标记之后，棋盘上每一个方格都至少与一个标记过的方格相邻。

4. 试找出所有的正整数对 (n, p)，使得 p 是素数，$n \leqslant 2p$ 并且 $(p-1)^n+1$ 可被 n^{p-1} 整除。

5. 圆 Γ 有两个内切圆 Γ_1，Γ_2，切点分别是 M, N，Γ_1 经过 Γ_2 的圆心。
Γ_1, Γ_2 的公共弦的延长线交 Γ 于 A, B 两点。线 MA, MB 分别交 Γ_1 分别于 E, F。
求证：EF 于 Γ_2 相切。

6. 试找出所有的函数 $f:R \to R$ 使得 $f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$ 对所有 $x, y \in R$ 都成立。

其中 R 表示实数集。

第 41 界IMO试题

1. 圆 Γ_1和圆 Γ_2相交于点 *M*和 *N*。设 *l* 是圆 Γ_1和圆 Γ_2的两条公切线中距离 *M*较近的那条公切线。*l* 与圆 Γ_1相切于点 *A*，与圆 Γ_2相切于点 B。设经过点 *M*且与 *l* 平行的直线与圆 Γ_1还相交于点 C，与圆 Γ_2还相交于点 *D*。直线 *CA* 和 *DB* 相交于点 *E*；直线 *AN*和 *CD* 相交于点 *P*；直线 *BN*和 *CD* 相交于点 *Q*。

求证：*EP=EQ*。

2. 设 *a, b, c* 是正实数，且满足 *abc=1*。求证：

(a- 1 + 1/b)(b - 1 + 1/c)(c - 1 + 1/a) ≤ 1。

3. 设 $n\geqslant 2$ 为正整数。开始时，在一条直线上有 *n* 只跳蚤，且它们不全在同一点。
对任意给定的一个正实数 λ，可以定义如下的一种“移动”：

- (1). 选取任意两只跳蚤，设它们分别位于点 *A* 和点 *B*，且 *A* 位于 *B* 的左边；
- (2). 令位于点 *A* 的跳蚤跳到该直线上位于点 *B* 右边的点 *C*， 使得 *BC/AB=λ*。

试确定所有可能的正实数 λ， 使得对于直线上任意给定的点 *M* 以及这 *n* 只跳蚤的任意初始位置，总能够经过有限多个移动之后令所有的跳蚤都位于 *M* 的右边。

4. 一位魔术师有一百张卡片，分别写有数字 *1* 到 *100*. 他把这一百张卡片放入三个盒子里，一个盒子是红色的，一个是白色的，一个是蓝色的。 每个盒子里至少都放入了一张卡片。 一位观众从三个盒子中挑出两个，再从这两个盒子里各选取一张卡片， 然后宣布这两张卡片上的数字之和。知道这个和之后，魔术师便能够指出哪一个是没有从中选取卡片的盒子。
问共有多少种放卡片的方法，使得魔术总能够成功？（两种方法被认为是不同的，如果至少有一张卡片被放入不同颜色的盒子）

5. 确定是否存在满足下列条件的正整数 *n*：*n* 恰好能够被 *2000* 个互不相同的质数整除，且 *2n+1* 能够被 *n* 整除。

6. 设 AH_1, BH_2, CH_3 是锐角三角形 ABC 的三条高线。 三角形 ABC 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相切于点 T_1, T_2, T_3， 设直线 l_1, l_2, l_3 分别是直线 H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 关于直线 T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 的对称直线。
求证：l_1, l_2, l_3 所确定的三角形，其顶点都在三角形 ABC 的内切圆上。

第 42 界IMO试题

1. $\triangle ABC$是锐角三角形，其外接圆的圆心是 O。X是从 A到 BC边上垂线的垂足。
已知$\angle C \geqslant \angle B+30^\circ$，

求证：$\angle A+\angle COX<90^\circ$。

2. a, b, c是正实数，设 a’ = √(a^2 + 8bc)，b’ = √(b^2 + 8ca)，c’ = √(c^2 + 8ab)，

求证： a/a’ + b/b’ + c/c’ ≥ 1。

3. 由整数组成的一个 21×21的矩阵，其每行每列都至多有 6个不同的整数。

求证，存在某个整数出现在至少 3行和 3列中。

4. 设 $n_1, n_2, ..., n_m$是整数，其中 m 是奇数。$x=(x_1, x_2, ..., x_m)$是 $1, 2, ..., m$的一个排列，

$f(x)=x_1n_1+x_2n_2+...+x_mn_m$，

求证，存在两个不同的排列 a, b使得 $f(a)-f(b)$能被 $m!$整除。

5. $\triangle ABC$，X在 BC上且 AX是$\angle A$的角平分线，BY是$\angle B$的角平分线，Y在 CA上。已知
$\angle A=60^\circ$， $AB+BX=AY+YB$，试求出所有$\angle B$可能的值。

6. $K>L>M>N$是正整数且 $KM+LN=(K+L-M+N)(-K+L+M+N)$。

求证 $KL+MN$是合数。

第 43 界IMO试题

1. 设 n 是给定的正整数，T 是一个集合，其元素是平面上满足 x, y 是非负整数且 $x+y<n$ 的点 (x, y)。T 中的点均被染上红色或蓝色，满足：如果 (x, y) 是红色，则所有满足 $x'\leqslant x$ 且 $y'\leqslant y$ 的点 (x', y') 也都染成红色。如果 n 个蓝点的横坐标各不相同，则称由这 n 个蓝点组成的集合为一个 X-集；如果 n 个蓝点的纵坐标各不相同，则称这 n 个蓝点所组成的集合为 Y-集。

求证：X-集的个数和 Y-集的个数相同。

2. BC 为圆 O 的直径，A 为⊙O 上的一点，$0^\circ<\angle AOB<120^\circ$，$D$ 是弧 AB（不含 C 的弧）的中点，过 O 平行于 DA 的直线交 AC 于 I，OA 的垂直平分线交⊙O 于 E、F，

求证：I 是△CEF 的内心。

3. 找出所有的正整数对 $m, n\geqslant 3$，是的存在无穷多个正整数 a，使 $(a^m+a-1)/(a^n+a^2-1)$ 为整数。

4. 设 n 为大于 1 的整数，全部正因数为 $d_1, d_2, ..., d_k$， 其中 $1=d_1<d_2<...<d_k=n$，

记 $D=d_1d_2+d_2d_3+...+d_{k-1}d_k$。

- a. 求证：$D<n^2$；
- b. 确定所有的 n，使得 D 能整除 n^2。

5. 找出所有从实数集 R 到 R 的函数 f，使得对所有 $x, y, z\in R$，有

$$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t))=f(xy-zt)+f(xt+yz)。$$

6. 设 Γ_1， Γ_2，...，Γ_n 是平面上半径为 1 的圆，其中 $n\geqslant 3$，记他们的圆心分别为 $O_1, O_2, ..., O_n$。假设任意一条直线都至多和两个圆相交或相切，
求证：

$$\sum_{i<j} 1/O_iO_j \leqslant (n-1)\pi/4 。$$

第 44 界IMO试题

1. 设 A 是集合 $S=\{1, 2, 3, ..., 1000000\}$的一个 101 元子集，求证： 存在 S 中的 100 个元素 $T_1, T_2, ..., T_{100}$ 使得集合

$$A_j=\{X+T_j \mid X \text{ 属于 } A\} \quad (j=1,2,...,100)$$

是两两不交的。

2. 求所有的正整数对 (a,b)，使得 $a^2/(2ab^2-b^3+1)$也为整数。

3. 一凸六边形，任意一组对边中点的连线是这组对边长度之和的 $\sqrt{3}/2$ 倍，求证这个六边行的
每个内角都是 120°。

4. 圆内接四边形 $ABCD$，从 D 向分别边 BC, CA, AB 引垂线，垂足分别为 P，Q，R。求证：$PQ=QR$ 当且仅当$\angle ABC$、$\angle ADC$ 的角平分线及 AC 三线共点。

5. 设 n 是一个正整数，$x_1, x_2, ..., x_n$ 是实数并且 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n$, 求证：

- a. $(\sum_{i,j} |x_i - x_j|)^2 \leqslant (2/3)(n^2-1)\sum_{i,j}(x_i - x_j)^2$。
- b. 上式等号成立当且仅当 $x_1, x_2, ..., x_n$ 是等差数列。

6. 设 p 是一个素数，求证存在一个素数 q 使得对每个整数 n，n^p-p 不能被 q 整除。